Tema 4: Combinatória e Recorrência

Princípio de inclusom/exclusom. Permutaçons com e sem repetiçom. Combinaçons com e sem repetiçom. Fórmulas combinatórias, teorema binomial.
Sucessons definidas por recorrência. Resoluçom de relaçons recorrentes por iteraçom. Relaçons de recorrência de ordem superior com coeficientes constantes. Funçons definidas recorrentemente.

Combinatória

Regras de Conteo útiles em probabilidade

- **Teorema** [regra da multiplicaçom]

  Se a primeira tarefa dum experimento dá como resultado n_1 resultados possíveis, e —***para cada um destes***— a segunda tarefa dá como resultado n_2 resultados possíveis, entom tenhem-se $n_1 \cdot n_2$ resultados possíveis para as duas tarefas xuntas.

A regra da multiplicaçom amplia-se a mais tarefas sucesivas (por exemplo, um experimento em três etapas). Os diagramas de árbores som útiles para obter a lista de resultados e permiten determinar o número de elementos no espaço mostral dum experimento.

Exemplo: Umha empresa vai construir umha pranta no oeste e outra no este. No este hai quatro cidades candidatas e no oeste hai duas cidades candidatas. Obtemos o espaço mostral mediante um diagrama em forma de árvore:

Cidades candidatas no este: A, B, C, D
Cidades candidatas no oeste: E, F

```
   /E
 A \F
/
 B /E
/  \F

\  /E
 C \F
\
 D /E
   \F
```

Espaço mostral = {AE, AF, BE, BF, CE, CF, DE, DF}

O problema que ainda resta por resolver é a asignaçom de probabilidades a cada evento do espaço mostral, para completar o modelo probabilístico.

Consideramos que as oito selecçons possíveis som equiprobábeis:

P(AE)=P(AF)=P(BE)=P(BF)=P(CE)=P(CF)=P(DE)=P(DF)=1/8

$P(E)=P(AE\cup BE\cup CE\cup DE)=P(AE)+P(BE)+P(CE)+P(DE)=1/8+1/8+1/8+1/8=1/2$

$\uparrow$

qualquer intersecçom de dous eventos de entre estes quatro dá $\emptyset$ porque só se pode escolher umha das quatro cidades do este.

Exemplo: Um talher trabalha cada dia com dous motores escolheitos ao chou dos cinco motores dos que dispón. Os motores 1 e 2 som do proveedor I e os 3, 4 e 5 som do proveedor II. O motor 2 é defectuoso. Calcular a probabilidade de seleccionar o motor defectuoso, e a probabilidade de seleccionar um ou os dous motores do proveedor I.

S_1 e S_2 som os motores seleccionados
A≡seleccionar defectuoso≡$(S_1=2)\cup(S_2=2)$
B≡seleccionar do proveedor I≡$(S_1\in I)\cup(S_2\in I)$

Diagrama de árvore

```
1     2
      3
      4
      5

2     1
      3
      4
      5

3     1
      2
      4
      5

4     1
      2
      3
      5

5     1
      2
      3
      4
```

Espaço mostral={12, 13, 14, 15, 21, 23, ..., 54}

P(12)=P(13)=...=P(54)=1/20

$P(A)=P(12\cup 21\cup 23\cup 24\cup 25\cup 32\cup 42\cup 52)=$

$\uparrow$

qualquer par intersecado destes oito dá $\emptyset$

$=P(12)+P(21)+P(23)+P(24)+P(25)+P(32)+P(42)+P(52)=8\cdot 1/20=0'4$

$P(B)=P(12\cup 13\cup 14\cup 15 \cup 21\cup 23\cup 24\cup 25 \cup 31\cup 32 \cup 41\cup 42 \cup 51\cup 52)=14/20=0'7$

$\uparrow$

qualquer par intersecado destes catroce dá $\emptyset$

VARIAÇONS

(sem repetiçom)

O número de arranjos ordenados, de r objectos seleccionados entre n objectos distintos, $r \leq n$, está dado por

$$V_{n,r}=V_n^r=n(n-1)...(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Indica o número de aplicaçons injectivas dum conjunto A com r elementos noutro conjunto B com n elementos.

Ideia: Tenhem-se n bolas distintas a colocar e r urnas, $n \geq r$. Estamos contando o número de formas distintas que hai de pôr umha bola em cada urna.

A primeira urna hai n formas de enchê-la, porque disponhemos de todas as bolas para pôr a que queiramos. Quando chegamos à segunda urna umha das bolas já a deixamos antes na primeira urna, assi que haverá (n-1) formas de encher esta segunda urna. Repetindo o razonamento até chegar à derradeira urna, obtemos a série geométrica. A fórmula obtémo-la do factorial do derradeiro elemento entre o factorial do primeiro elemento menos um.

Exemplo: n=5 bolas, cada umha dumha cor distinta $\{b_1 ..., b_5\}$
r=3 urnas $\{u_1 ..., u_3\}$. Em cada urna vai umha bola.

Posibilidades u_1	Posibilidades u_2	Posibilidades u_3
b_1	b_2	b_3 b_4 b_5
	b_3	b_2 b_4 b_5
	b_4	b_2 b_3 b_5
	b_5	b_2 b_3 b_4

Esta tábua só representa a primeira posibilidade de cinco para encher a primeira urna. Em total as variaçons $V_{5,3}=5\cdot4\cdot3=5!/2!=60$ jeitos distintos de encher as três urnas cada umha com umha das cinco bolas.

Vemos que nas variaçons **importa a ordem** de selecçom.

PERMUTAÇONS

(sem repetiçons)

Quando falamos do número de jeitos possíveis de ordenar n elementos, falamos de **permutaçons** de n elementos:

$$P_n=n!=n\cdot(n-1)...2\cdot1$$

É o número de aplicaçons bijectivas entre dous conjuntos de n elementos.

*Note-se a relaçom coas variaçons. Por esta, em algúns textos às variaçons chama-se-lhes ***permutaçons de r elementos seleccionados de entre n*** já que se define "arranxo ordenado" como "permutaçom".

PERMUTAÇONS COM REPETIÇOM

ver mais abaixo

VARIAÇONS COM REPETIÇOM

de n elementos tomados de r em r:

$VR_{n,r} = VR_n^r = n^r$

é o número de aplicaçons desde o conjunto A / |A|=r no conjunto B / |B|=n

COMBINAÇONS

(sem repetiçom)

O número de subconjuntos (disjuntos) de tamanho r que se poden seleccionar de n objectos distintos, r ≤ n, é

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{V_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...2\cdot 1}$$

Vemos que nas combinaçons **nom importa a ordem** de selecçom.

Ideia: O número de *subconjuntos ordenados* era $V_{n,r}=n!/(n-r)!$ e como o número de formas de ordenar r elementos é r! resulta a fórmula.

Exercício: Numha proba participan duas mulheres e oito homes. Dos dez participantes escolherán-se três. Qual é a probabilidade de escolher exactamente umha mulher entre os três seleccionados?

——casos favoráveis: escolher umha mulher ≡ escolher umha mulher das duas e escolher dous homes dos oito.

——casos possíveis: escolher três elementos de entre dez, sen que importe a ordem em que se faga.

soluçom: $$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = 7/15$$

Exercício: Umha série de candidatos están ordenados em funçom da sua aptitude para optar a um posto. A companhia contrata a dous opositores de entre todos ao azar, sen ter em conta as suas aptitudes. Qual é a probabilidade de que se contrate exactamente a um dos dous primeiros classificados na proba?

——casos favoráveis: escolher um de entre os dous primeiros ≡ escolher um de entre os dous e que o outro nom seja de entre os dous primeiros.

—casos possíveis: escolher dous elementos dum total indefinido n.

soluçom: $$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{n-2}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

PERMUTAÇONS COM REPETIÇOM

O número de jeitos de dividir n objectos distintos em k grupos que contenhen $n_1, n_2, ..., n_k$ objectos respectivamente, é

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \qquad \text{onde } \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Idea: no primeiro grupo seleccionam-se n_1 dos n elementos. No segundo grupo seleccionam-se n_2 dos $n-n_1$ restantes. No terceiro grupo seleccionam-se n_3 dos $n-n_1-n_2$ restantes. Assi sucesivamente até esgotar os n elementos. De acordo coa definiçom de combinaçom e a regra da multiplicaçom:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}...\binom{n-...-n_{k-1}}{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot ... \cdot\frac{(n-...-n_{k-1})!}{n_k!\underbrace{(n-...-n_{k-1}-n_k)!}_{0}} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \qquad \text{onde } \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Exemplo: Tem-se que repartir 10 empregados entre 3 postos. O número de prazas para os postos I, II e III som respectivamente 3, 4 e 3. De quantas formas distintas se pode facer o reparto?

$$PR^{10}_{3,4,3} = \frac{10!}{3!4!3!} = 4.200 \text{ formas distintas}$$

Se três dos empregados deben ser asignados ao posto I, qual é a probabilidade de que isto aconteça numha asignaçom aleatória dos postos?

$$\frac{PR^{3}_{3}\cdot PR^{7}_{3,4}}{4.200} = \frac{7!/(3!4!)}{4.200} = 1/120$$

▪ Exercício: *Se um campionato de liga regular de fútbol se compón de 22 equipas, respostar...*

a) Qual é o número de partidos que se disputan se todas as equipas tenhem que enfrentar-se a todas as outras esquadras?

b) Qual é o número mínimo de jornadas necessárias para completar o campionato?

Suponhamos que jogam quatro equipas

a	b
	c
	d
b	a
	c
	d
c	a
	b
	d
d	a
	b
	c

4 x 3 = 12 partidos

importa a ordem já que (a,b) joga-se na casa de a em quanto que (b,a) joga-se na casa de b. Assi pois o número de partidos neste exemplo é:

$V_{4,2}= 4! / (4-2)! = 4\cdot 3\cdot 2 / 2 = 12$

Polo tanto para 22 esquadras a resposta é:

a) $V_{22,2}= 22! / 20! = 22\cdot 21\cdot 20! / 20! = 22\cdot 21 =$ 462 partidos

Em quanto ao número mínimo de jornadas, temos que:

462 partidos = [nº partidos por jornada] x [nº jornadas]

Como som 11 equipas e cada partido o disputam 2 esquadras, em cada jornada haverá como máximo (que é o que nos interessa para que o número de jornadas seja mínimo) 11 partidos. Assi pois:

c) nº jornadas = 462 / 11 = 42 jornadas

▪ Exercício: *Umha enciclopédia em cinco volumes coloca-se numha estanteria de forma aleatória. Calcular a probabilidade de que a colocaçom resulte na ordem natural.*

O número de formas distintas de ordenar os cinco tomos é 5!

Pola lei de Laplace, a resposta é 1/120

▪ Exercício: *Um lote de 26 componentes contén 6 defectuosos. Extráe-se umha mostra aleatória sen reemprazamento de lote de 4 componentes.*

a) Qual é a probabilidade de que todos os componentes sejam nom defectuosos?

b) Qual é a probabilidade de obter 2 defectuosos e 2 nom defectuosos?

a)

$$\frac{\binom{6}{0}\binom{20}{4}}{\binom{26}{4}} = \frac{20!/(4!\cdot 16!)}{26!/(4!\cdot 22!)} = \frac{20!\cdot 4!\cdot 22!}{26!\cdot 4!\cdot 16!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23} = 0.32408$$

b)

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{20}{2}}{\binom{26}{4}} = \frac{\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{20!}{2!18!}}{\frac{26!}{4!22!}} = \frac{6!20!4!22!}{2!4!2!18!26!} = 0.19063$$

▪ Exercício: *Lanzam-se 3 dados. Qual é a probabilidade de obter dous uns e um seis?*

$$\frac{PR^{2,1}_{3}}{VR_{6,3}} = \frac{3!/2!}{6^3} = \frac{6/2}{6\cdot 6\cdot 6} = \frac{1}{72} = 0.0138$$

▪ Exercício: *Quantas fichas hai num xogo de dominó sabendo que sobre cada ficha hai dous símbolos escolhidos do conjunto {0,1,...,6}?*

$$CR_{7,2} = \binom{8}{2} = 8!/(2!6!) = 8\cdot 7/2 = 4\cdot 7 = 28$$

▪ Exercício: [V.7] *Numha sá atópan-se reunidas 20 persoas. Qual é a probabilidade de que todos tenhan o mesmo cumpreanos? Quantas persoas deve haver na habitaçom para que a probabilidade de que polo menos duas de elas tenham o mesmo cumpreanos seja maior de 1/2?*

a)

casos favoráveis: $V_{365,20}=365!/(345!20!)$

casos possíveis: $VR_{365,20}=365^{20}$

aplicamos Laplace

b)

n=número de persoas

$P=\binom{365}{n}/365^n \Rightarrow 1-P>1/2 \Leftrightarrow P<1/2$

dando valores conclúe-se que $n\geq 23$

▪ Exercício: [IV.14] *No interior dum círculo seleccioma-se um ponto ao azar. Calcular a probabilidade de que o ponto esteja mais próximo ao centro da circunferência.*

Um ponto está mais preto do centro em funçom da porçom do radio r que o separa do mesmo

casos favoráveis: área da circunferência interna (radio r/2) = $\pi r^2/4$
casos possíveis: toda a área da circunferência (radio r) = πr^2
por Laplace, a resposta é 0.25

▪ Exercício: *Dous alunos da faculdade acordam reunirem-se entre as quatro e as cinco da tarde na biblioteca. Se ambos chegam de forma independente e uniforme em dita hora, e decidem nom aguardar mais de um cuarto de hora, qual é a probabilidade de que se reúnam?*

resoluçom gráfica

5:00

			xxxx xxxx
		xxxx xxxx	
	xxxx xxxx		
xxxx xxxx			

4:00 5:00

dividimos a hora em quatro cuartos: 15 min./60 min. = 0.25

x=hora à que chega o aluno 1
y=hora à que chega o aluno 2

imaxínen-se as rectas:
y=x+0.25 (diagonal por enriba das xxx)
y=x-0.25 (diagonal por debaixo das xxx)

xxx = área favorábel = 1-(0.75·0.75) = 0.4375 é a resposta
a área possível é 1